ENSAYOS ECONOMICOS
Nº 8 - Diciembre 1978

UN MODELO PARA LA ADMINISTRACION DE RESERVAS INTERNACIONALES (°)

por Rolf R. Mantel*

0. INTRODUCCION

Uno de los problemas que se presentan a un Banco Central es el de la administración de sus reservas internacionales. El propósito del presente trabajo es el de proporcionar algunas ideas al respecto, bajo el supuesto de que el nivel de dichas reservas ya está determinado por la política económica. Con ello el problema se reduce a la determinación de las políticas de inversión óptimas en activos internacionales, teniendo en cuenta que el conocimiento del futuro es incierto, tanto desde el punto de vista de los flujos netos de fondos a invertir como de los tipos de cambio entonces en vigencia y los rendimientos de las distintas clases de activos.

No es mucho lo escrito sobre el tema. Una buena vista panorámica puede hallarse en el artículo de Chico Fardo (1974). Los modelos allí enumerados, sin excepción, se re

(°) Trabajo presentado en las Jornadas de Economía Monetaria y Sector Externo - 21 y 22 de setiembre de 1978, organizadas por el Centro de Estudios Monetarios y Bancarios del Banco Central de la República Argentina. (*) El autor es miembro de la Carrera del Investigador Científico del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas. El presente trabajo fue realizado mientras era residente en el Centro de Estudios Monetarios y Bancarios del Banco Central de la República Argentina.

fieren a un problema relacionado con el nuestro, el de las inversiones de los bancos comerciales. En el mismo artículo se presenta un desarrollo histórico de los modelos para el manejo óptimo de tales activos. Cohen y Thore (1970) proveen una muy interesante clasificación de las técnicas que han sido exploradas hasta entonces para la solución del problema; dicha clasificación se presenta a continuación, con el agregado propio de los últimos dos puntos.

1. Enfoques basados en la teoría de los inventarios y la programación dinámica.
2. Teoría Bayesiana y de decisiones secuenciales.
3. Simulación.
4. Programación bajo incertidumbre en dos etapas.
5. Programación con restricciones probabilísticas.
6. Programación cuadrática.
7. Teoría de la selección de cartera de Markowitz (1959), como en el modelo de Cheng (1962).
8. Programación bajo incertidumbre en etapas múltiples, utilizando el principio de descomposición primal de Dantzig y Wolfe, como en el modelo de Bradley y Crane (1972).

El modelo que se describirá en el presente trabajo introduce algunas características adicionales al mencionado en último término en la lista anterior. Debe tenerse en cuenta que los intereses de un Banco Central no coinciden con los de los bancos comerciales. Si bien los tradicionales requisitos de liquidez, rendimiento y seguridad de la inversión siguen siendo válidos, el orden de prioridades no es el mismo, quedando el rendimiento relegado a último término. Además cobran importancia ciertas restricciones de tipo político, como son las de no operar en ciertas plazas con determinadas instituciones, o de invertir sumas prefijadas en activos específicos. Otras restricciones que deben tenerse en cuenta son las de reciprocidad con ciertas instituciones con las que se mantienen vínculos más estrechos. Finalmente, debe considerarse la posibilidad de liquidación anticipada de algunos activos, cuando ello resultare ventajoso.

1. ESTRUCTURA TEMPORAL DEL PROBLEMA

La naturaleza del problema corresponde a uno de decisión bajo incertidumbre en etapas múltiples. Se supone que el agente que debe tomar la decisión -en este caso el Banco Central- actúa en el período presente, o período inicial, designado en lo que sigue con el índice t = 0. La información sobre la situación presente de los distintos mercados está disponible en el momento de tomar la decisión, como así también lo está la cantidad de fondos a invertir y una descripción de la composición de la cartera de activos. El problema consiste en decidir cuáles de estos activos deben realizarse, qué otros y en qué cantidades deben adquirirse, teniendo en cuenta los problemas de liquidez que puedan presentarse en el futuro, la seguridad que presenta la inversión tanto desde el punto de vista de la institución que la respalda como de las posibles pérdidas de capital que puedan producirse, el rendimiento que se obtiene de la cartera, las relaciones de cooperación entre Bancos Centrales que imponen ciertas restricciones de reciprocidad, el riesgo inherente a la inversión de grandes sumas en cierto tipo de monedas, de instituciones o clases de activos.

Si fuera conocido el detalle del flujo neto de divisas resultante de las cuentas internacionales, de los tipos de cambio, de la estructura de las tasas de interés, y otros pormenores en todos los períodos futuros, el problema que nos ocupa se reduciría al ya suficientemente engorroso del encaje de los plazos en que se pueden realizar los activos con los flujos de fondos disponibles, de manera de maximizar el rendimiento de la cartera. Nótese que ya a esta altura se presenta una dificultad, pues el problema no está bien definido. Ello se debe a la imposibilidad de asignar un valor a una cartera de activos que todavía no ha sido liquidada. Sin embargo, una vez resuelta la elección de un objetivo apropiado, la solución del problema puede ser determinada de manera rutinaria por alguno de los métodos usuales de programación lineal.

Una salida a las dificultades que presenta la incertidumbre consiste justamente en plantear una estrategia de inversión determinada, para luego analizar sus consecuencias bajo distintos supuestos alternativos sobre la evolución futura de los mercados. El análisis de varias de tales estrategias y de sus efectos bajo distintas alternativas es la técnica que se conoce con el nombre de simulación. Esta técnica, bajo la forma de un juego interactivo entre un operador que simula tomar las decisiones y una computadora que simula los eventos futuros, permite alcanzar estrategias apropiadas sin necesidad de recurrir al artificio siempre algo arbitrario de sustituir las preferencias del responsable de la política de inversión por un objetivo único como es el del valor esperado de la cartera en el último período del horizonte de planeación, o como se sugiere más adelante, por el valor de dicha cartera en los casos más desfavorables para el inversor.

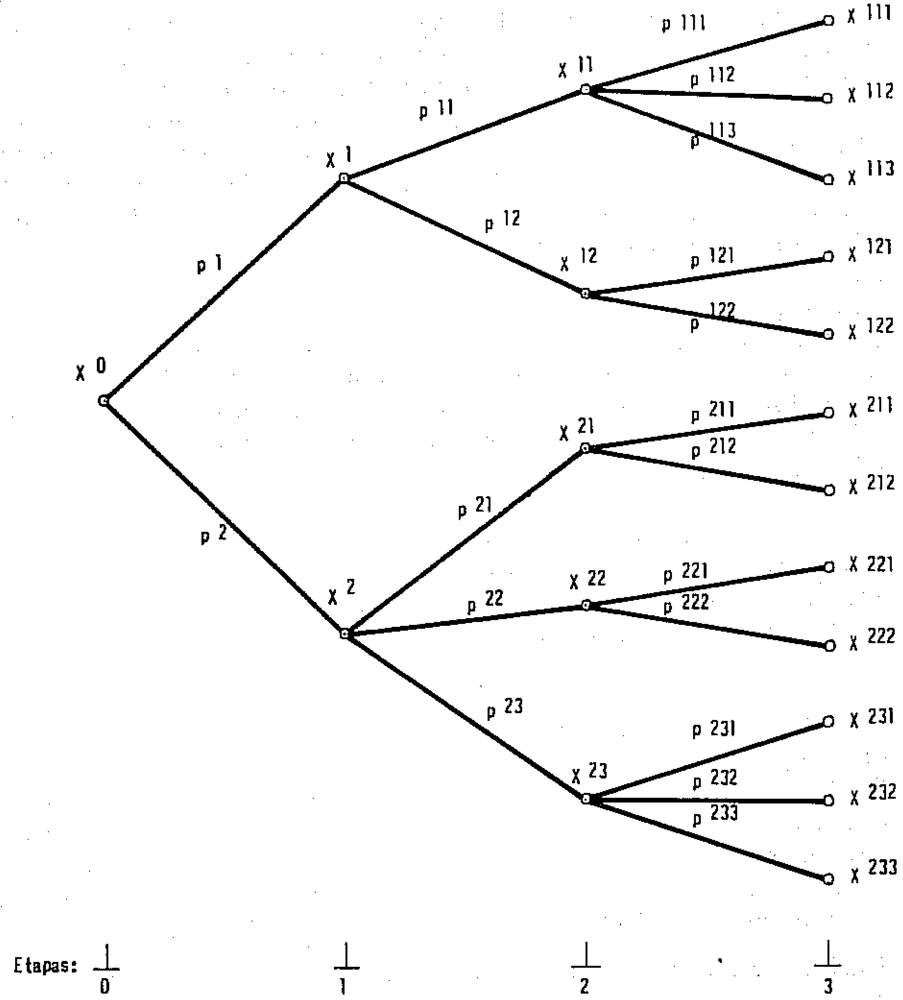
Sin embargo debe reconocerse que el conocimiento que se tiene del futuro es imperfecto, debido a la incertidumbre. Por lo tanto, actuar como si tal incertidumbre no existiera, en base a los valores esperados de los parámetros del sistema, puede inducir a serios errores de apreciación. Es sabido que no es suficiente descontar de los rendimientos esperados una prima por el riesgo pues ello llevaría a preferir la inversión en activos cuyo rendimiento esperado es máximo. Una simple observación de la diversificación de sus carteras en que incurren los grandes inversores muestra que tal comportamiento dista mucho de ser típico. "No deben colocarse todos los huevos en una misma canasta", como refiere el dicho popular. Por supuesto, a esto se agrega el peligro de la iliquidez, al haberse producido la necesidad de utilización de reservas en una medida que excede a lo esperado.

Una vez aceptada la existencia de incertidumbre, debe reconocerse también la importancia del factor tiempo. Al transcurrir un período adicional, el agente decisor habrá acumulado más información. En particular se conocerán las tasas de interés y los tipos de cambio del período presente, que antes fuera un futuro desconocido. En ese momento deberá tomarse una nueva decisión, asignando los fondos nuevos más los de operaciones que han vencido, más los obtenidos de una eventual liquidación anticipada o venta en mercados secundarios de activos. Es importante por lo tanto que la cartera sea en todo momento suficientemente flexible como para permitir reajustes posteriores de la misma en base a una información más completa. En otras palabras, la decisión a tomarse en el período inicial debe considerar que en etapas posteriores será necesario tomar nuevas decisiones que por supuesto dependerán de las decisiones previas. El resultado de la gestión se evaluará al final de varios períodos, luego de toda una secuencia de tales decisiones.

Es usual graficar este proceso de decisión en etapas múltiples mediante la utilización de lo que se ha dado en llamar árboles de decisión. Un ejemplo particular se presenta en el gráfico 1.

En cada uno de los vértices -puntos de los que parten las ramas del árbol- se ha señalado la decisión que corresponde tomar en dicho punto, indicándola con x^s. El índice s toma valores en el conjunto S de "estados de la naturaleza", pues la decisión depende del estado particular en que se encuentra la información de que dispone el agente decisor. Cada elemento del espacio S es a su vez un conjunto de índices $s_1, \ldots, s_t$, donde por ejemplo s_1 indica los eventos que ocurrirán durante el primer período, s_2 los que ocurrirán durante el segundo, y así sucesivamente. Nótese que el número t de tales índices identifica la etapa en que ocurre la decisión. Por ello estos índices identifican a la decisión tomada en cuanto a la información disponible en el momento de decidir. En el

Gráfico 1


x 0
p 1
p 2
x 1
x 2
p 11
p 12
p 21
p 22
p 23
x 11
x 12
x 21
x 22
x 23
p 111
p 112
p 113
p 121
p 122
p 211
p 212
p 221
p 222
p 231
p 232
p 233
x 111
x 112
x 113
x 121
x 122
x 211
x 212
x 221
x 222
x 231
x 232
x 233
Etapas: 0
1
2
3

ejemplo, una vez tomada la decisión x^o, la información posterior indica al agente decisor si la nueva decisión debe tomarse de acuerdo con los acontecimientos de la rama que lleva a x^1 o a la rama que lleva a x^2. En el segundo caso, por ejemplo, una vez tomada la decisión x^2 se obtiene la información que permite inferir si la nueva rama lleva a x^{21}, x^{22}, o x^{23}.

Como ya ha sido señalado antes, la evaluación de la gestión durante los períodos que finalizan con el horizonte de planeamiento que designaremos con T y que en el ejemplo del gráfico 1 es igual a tres períodos, se realiza a la finalización de dicho horizonte, momento en el que se poseerá toda la información pertinente en cuanto a la evolución de precios y tasas relevantes, además de las decisiones que se hayan tomado en su momento. En otras palabras, el agente decisor estará situado en uno de los vértices finales del árbol de decisión, y desde el mismo tendrá una visión retrospectiva sobre todas las ramas que conducen a dicho vértice final. Por ejemplo, si la evolución del sistema hizo que el vértice final es el designado con x^{222}, la historia pasada del sistema indicará la ruta desde la raíz x^0, pasando por el primer vértice x^2 y luego por el x^{22} antes de llegar al final. En cada uno de esos vértices corresponde tomar una decisión en base al entorno económico corriente y las decisiones previas.

Lamentablemente, en el momento de tomar cada una de las decisiones intermedias, no se conoce cuál es la rama por la que continuará la evolución futura del sistema. De este hecho surgen todas las dificultades asociadas con la incertidumbre. Sin embargo, en muchos casos se dispone de información suficiente, basada en la experiencia y observación de los eventos pasados, como para asignar un mayor o menor grado de confianza a que los eventos se desarrollarán en uno u otro sentido. En el caso óptimo desde el punto de vista de la información disponible para la toma de decisiones, se dispondrá de una evaluación numérica de dicho grado de confianza, bajo la forma de una distribución de probabilidades. En el gráfico 1 se ha designado a cada una de las ramas del árbol de decisión con la probabilidad correspondiente. Nótese que la notación se ha elegido de manera que la rama que termina en el vértice en que deberá tomarse la decisión x^s ha sido designada con la probabilidad p^s. Los axiomas usuales sobre las probabilidades se suponen válidos, de modo que las suponemos positivas -podemos desechar sin mayores consecuencias eventos virtualmente imposibles- y que la suma de las probabilidades asignadas a ramas que parten de un mismo vértice es igual a la unidad. En el ejemplo, $p^{21} + p^{22} + p^{23} = 1$, y así con todos los demás vértices.

La interpretación de estas probabilidades es la del ejemplo siguiente. Nos encontramos en el vértice designado con x^2; después de tomar la decisión correspondiente, observamos el desarrollo de los acontecimientos de la segunda etapa. Sabemos con certeza -puesto que conocemos la distribución correspondiente- que las probabilidades asignadas a las tres ramas siguientes son p^{21}, p^{22} y p^{23}, respectivamente. Por lo tanto la probabilidad que nuestra observación nos lleve a la conclusión de que la próxima decisión a tomar es la correspondiente a uno de los vértices x^{2j} es p^{2j}, e igual por lo tanto a la que correspondería si el mundo que nos rodea eligiera el estado en que nos encontramos al azar, desinsaculando una bolilla con el número j de una urna en que las bolillas designadas con el número i se encuentran en proporción a la probabilidad p^{2i}. Es necesario destacar que la distribución de probabilidades depende del vértice desde el cual parten las ramas correspondientes. Se trata por lo tanto de probabilidades condicionales. Si se desea por ejemplo conocer cuál es la probabilidad de terminar en el vértice x^{222}, será necesario recorrer hacia la raíz x^0 todas las ramas que llevan a dicho vértice, multiplicando las probabilidades correspondientes, para así obtener la probabilidad total $p^2 \,.\, p^{22} \,.\, p^{222}$, que designaremos con q^{222}. Formalmente,

$$q^{s_1, \dots, s_t} = p^{s_1}\, p^{s_1, s_2} \dots p^{s_1, \dots, s_t}$$

para todos los valores de los subíndices. Nótese que es fácil determinar las probabilidades condicionales en base al conocimiento de las totales q^s correspondientes a los vértices de la última etapa. Las probabilidades totales de etapas anteriores se obtienen simplemente por medio de sumas de las correspondientes a la etapa posterior; luego pueden calcularse las probabilidades condicionales dividiendo las totales de una etapa por las correspondientes de la etapa previa.

La existencia de un sistema bien definido de probabilidades permite determinar la solución del problema de inversión mediante la maximización de una función objetivo que consiste en la ponderación de los resultados correspondientes a cada uno de los vértices finales utilizando las probabilidades adecuadas. Este criterio es utilizado comúnmente en la teoría de los juegos de estrategia y lleva el nombre de sus propugnadores, el criterio de la utilidad esperada de Von Neumann y Morgenstern. El caso que nos ocupa es especial, en el sentido de que desde el punto de vista de la toma de decisiones para todo un país el problema de la inversión de las reservas internacionales es relativamente pequeño. Puede entonces aceptarse como buena una aproximación lineal a la función de utilidad del Gobierno, de manera que es posible descentralizar la decisión sobre la administración de los activos externos por medio de dicha aproximación lineal.

La ventaja de este procedimiento consiste en que podemos reemplazar la función de utilidad, en general desconocida o difícil de estimar, por el criterio más sencillo del rendimiento neto de la cartera, medida por el flujo descontado esperado neto que permite la misma para el futuro. Como hemos supuesto que los flujos netos de fondos provenientes de las cuentas externas está determinado por la política económica, este criterio es equivalente a la maximización del valor esperado de la cartera al final del horizonte económico. Como se trata del valor en un solo momento, no es necesario descontarlo -con lo que se evita el problema difícil de fijar la tasa de descuen to apropiada, aunque subsiste la dificultad de evaluar la cartera cuando ésta consiste, como es natural, de activos aún sin liquidar-, debido a que el horizonte económico, fijado por comodidad en un número de períodos razonable como para permitir la solución del problema sin que ese corte arbitrario en el transcurso del tiempo afecte demasiado la solución, no determina el momento de liquidación de la cartera que puede ser posterior.

Un caso opuesto al recién comentado, en que se conoce la distribución de probabilidades de los eventos futuros, es el caso de ignorancia absoluta sobre cuál es el mundo en que realmente vivimos -ignorancia, es decir, en cuanto a cuáles son las ramas del árbol de decisión que habrá que recorrer cuando llegue el momento-. Diversas son las reglas de decisión que han sido sugeridas para este caso. Para una excelente revisión crítica de las mismas se recomienda al lector el libro de Luce y Raiffa (1957). Aquí nos centraremos en una de ellas, la conocida con el nombre del principio del maximin. Se considera que este principio, extremadamente conservador, puede representar en buena medida -aunque quizá de manera algo exagerada- el comportamiento que tradicionalmente se imputa a un Banco Central.

Las reglas del juego usuales exigen de los Bancos Centrales extremada cautela, con mucho mayor énfasis en la salvaguardia de la seguridad en la inversión de los fondos de propiedad de la comunidad que en el rendimiento, si éste no es absolutamente cierto. El criterio del máximin considera al "mundo" o "naturaleza" como a un formidable adversario cuya única finalidad consiste en perjudicarnos lo más posible. Por ello es necesario adoptar contra dicho adversario la estrategia óptima bajo tales supuestos, que consiste en maximizar el nivel de seguridad, definido como la utilidad mínima obtenible bajo cualquier circunstancia, por adversa que ella sea. En el caso que aquí se presenta, por los comentarios que se han realizado para el caso en que se conocen las probabilidades correspondientes, esto requiere considerar el valor final de la cartera en el último período del horizonte de planeamiento.

Dicho valor adquirirá un nivel determinado para cada uno de los vértices finales del árbol de decisión correspondiente. Toda la atención se centrará en el vértice final en el que la cartera alcance su valor más desfavorable, y la estrategia a seguir dispondrá lo necesario para que dicho valor llegue a ser el mayor posible.

Finalmente, daremos un tercer criterio que permitirá suavizar los efectos de estos dos extremos. Por un lado, las probabilidades que se asignarán a las distintas ramas del árbol de decisión no serán un dato absolutamente fidedigno -nos hallamos ante un caso de conocimiento imperfecto de las probabilidades-. Por el otro, es poco creíble una teoría de la conspiración internacional por la cual el resto del mundo se empecina en tratar de que nuestras reservas sean las menores posibles. Por ello, un criterio que combine de alguna manera estas dos posiciones extremas puede ser el adecuado. El que se propone en el presente trabajo consiste en utilizar un conjunto de probabilidades determinadas de la manera lo más objetiva posible, en especial analizando la experiencia anterior, fijando un límite máximo a las pérdidas que se está dispuesto a soportar -equivalentemente, fijando un nivel de seguridad mínimo sobre los rendimientos que se desean alcanzar en todos los casos, aún a costa de la pérdida de algunas oportunidades de realizar grandes beneficios-. En otras palabras, en vez de maximizar el rendimiento mínimo, o de maximizar el rendimiento esperado, se maximiza este último sujeto a ciertas exigencias en cuanto al primero.

2. EL MODELO: RESTRICCIONES Y OBJETIVOS

En la presente sección se dará una descripción de las variables del modelo y de las restricciones que las afectan. Utilizaremos distintos índices para distinguir entre ellas. En primer lugar, designaremos con el índice $i = 1, \ldots, I$ a los instrumentos o activos en los que se invertirán las reservas internacionales, mientras que se designará con el índice $j = 1, \ldots, J$ a las diversas instituciones responsables de dichos instrumentos. Se supone que cada instrumento estará a cargo de una sola institución, que podrá ofrecer más de un instrumento. Esta relación se indica con conjuntos I_j de instrumentos de la institución j. También será necesario distinguir los instrumentos o activos de acuerdo con su fecha de compra o emisión $t = 1, \ldots, T$, donde T es el horizonte económico del agente decisor. Finalmente, la estructura temporal bajo incertidumbre obliga a precisar el estado del mundo o de la naturaleza en que se supone que se está midiendo la variable correspondiente. Como antes, este índice es uno de los elementos del espacio S de estados. Con estas convenciones podemos definir nuestras variables.

Las tenencias de activos se designarán con a_s^{it}, que significa la cantidad del activo materializado en el instrumento i, que fuera adquirido durante el período t, e integra la cartera de activos en el estado s. Recuérdese que la descripción del estado se refiere no sólo a los eventos que han ocurrido hasta el momento en que se lo describe, sino implícitamente también al período o etapa correspondiente, ya que dicho período queda señalado por conocerse los eventos anteriores a él pero no los posteriores. La unidad de medida de los activos será en todos los casos la cantidad que puede ser adquirida en el momento de su adquisición con una unidad de la moneda que se utilice como patrón de medida, de modo que por definición el precio de adquisición de cada activo es igual a la unidad. Esto es fácil apreciarlo en los casos de depósitos, pero quizá no tanto en el caso de bonos; en este último caso habrá que ajustar el rendimiento a esta unidad.

Nótese que el concepto recién definido requiere que si $s = s_1, \ldots, s_u$ necesariamente se debe verificar que t no exceda al valor de u; no están definidos activos en cartera emitidos con posterioridad a su tenencia. Nótese también que a_s^{iu} representa la tenencia de activos emitidos durante el período a que se refiere el estado s; en otras palabras, nos hallamos frente a las adquisiciones del período u.

Las ventas de activos se representarán con v_s^{it}, que por lo tanto se debe interpretar como la cantidad del activo i adquirido en el período t que se realiza durante el período correspondiente al estado s, si es que han acaecido los eventos que llevan a tal estado.

A fin de poder representar adecuadamente las ecuaciones de balance de los activos en cartera, necesitamos tener en cuenta que, dada la estructura temporal del problema, no todos los estados del espacio S pueden darse en forma independiente entre sí. Dado un estas $s = s_1, \ldots, s_t$ arbitrario, el mismo no pudo haber ocurrido si antes no se hubiera producido el estado previo $s' = s_1, \ldots, s_{t-1}$. Diremos que el estado s es una continuación del estado s', y representaremos dicha relación entre estados consecutivos en el tiempo con la fórmula s C s'. Llamaremos a C "relación de continuación".

Con este herramental podemos describir las ecuaciones de balance de inventario para los activos. Estas son:

$$(1) \qquad a_s^{it} + v_s^{it} = a_{s'}^{it} \text{ para } s \; C \; s'$$

donde los índices toman todos los valores para los que las variables están definidas. Esta ecuación simplemente enuncia la condición obvia de que las tenencias de un activo al final de un período son las del anterior menos las ventas del período.

Los requisitos de liquidez implican que las compras de activos no pueden exceder la entrada neta de fondos para invertir más los ingresos por ventas, liquidaciones, y otros ingresos provenientes de la tenencia de activos. Sea f_s el flujo neto de fondos provenientes de las cuentas internacionales en el estado s, medido en la moneda de referencia -esta cantidad podrá ser tanto positiva como negativa, dependiendo el estado de los pagos internacionales-. Sean p_s^{it} y r_s^{it} el precio de venta asociado con la venta v_s^{it} y la renta asociada con la tenencia de activos a_s^{it}, respectivamente. Teniendo en cuenta la manera de definir las unidades, está claro que en la práctica estos precios y rendimientos estarán normalizados en base al precio de adquisición más todos los gastos de adquisición, una vez que del precio de venta o rendimiento se haya deducido cualquier importe que lo reduzca, como ser impuestos, comisiones, etc. Podemos indicar entonces las restricciones de liquidez:

$$(2) \qquad f_s + \sum_{it} r_s^{it} a_s^{it} + \sum_{it} p_s^{it} v_s^{it} \geqq 0$$

válidas para todos los estados s del espacio S, donde las sumas se extienden por todos los períodos para los que las variables han sido definidas -en el caso de las tenencias incluye el período corriente, pues se trata de las adquisiciones, mientras que en el caso de las ventas no, ya que no es de suponer que un activo se venda en el momento de su emisión-. Para comodidad en la expresión de esta relación se ha definido $r_s^{it} = -1$ cuando $s = s_1, \ldots, s_t$; esto significa que el "rendimiento" -es decir costo- de las "tenencias" -es decir adquisiciones- de activos originados en el período corriente es igual a una unidad monetaria negativa, que es el precio que por definición corresponde a tal operación.

Es de notar que estas restricciones de liquidez obligarán a la realización de algún activo en el caso de que el flujo neto de fondos a invertir sea negativo -es decir, se trate de una demanda de divisas-.

Las restricciones de reciprocidad y riesgo institucional imponen límites mínimos y máximos a invertir en cada una de las instituciones, aunque dichos límites pueden ser cero e infinito respectivamente. Ello nos da, para la reciprocidad, la cota mínima:

$$\sum_{i} a^{it} \geqq m_s^j \tag{3}$$

y para el riesgo institucional la cota máxima:

$$\sum_{i} a_s^{it} \leqq u_s^j \tag{4}$$

En ambos casos la suma se extiende a los instrumentos de la institución correspondiente, es decir, para i en I_j.

Sea finalmente w_s^{it} la valuación de las tenencias de activos componentes de la cartera existente al final del horizonte económico, valuación que suponemos definida para aquellos estados s en el conjunto de estados finales S_T con la propiedad que $s = s_1, \ldots, s_T$.

Dicha valuación en la práctica podrá corresponder al precio de mercado, si hay mercados secundarios para los activos, al valor descontado a la tasa corriente de interés por el período de inmovilización restante, o al costo -capitalizado o no- de la inversión. Si bien el valor asignado a cada activo podrá ser más o menos arbitrario, la influencia en cambios en el mismo será menor cuanto más alejado esté el período final del inicial. De todos modos es posible determinar cuantitativamente el grado de influencia de dichos cambios por medio de un análisis de sensibilidad realizado con técnicas de programación paramétrica.

Las restricciones definidas por:

$$(5) \qquad \sum_{it} w_s^{it} \ a_s^{it} \geqq z \ b_s, \text{ para } s \text{ en } S_T$$

donde la suma se extiende a todos los instrumentos i y todos los períodos t del horizonte económico, permiten la aplicación del criterio del maximin si b_s se interpreta como el nivel relativo del valor de la cartera requerido en el estado final s y z se determina por medio de un proceso de maximización. Por otra parte, si se fija el nivel de z a priori, (5) representa la restricción sobre el valor mínimo que debe adoptar la cartera en cada situación. El objetivo a maximizar podría ser entonces el valor esperado de la cartera sujeto a la condición (5) a fin de garantizar una cota a las pérdidas de capital. Dicho valor esperado de la cartera consiste simplemente de la suma de los miembros izquierdos de la relación (5) ponderada por las probabilidades correspondientes, como en la definición siguiente:

$$(6) \qquad k = \sum_{i} q^s \sum_{it} w_s^{it} \ a_s^{it}$$

en la que nuevamente la suma se extiende a todos los instrumentos i, a todos los períodos t, y además a todos los estados finales s en S_T.

A fin de referirnos en los párrafos subsiguientes a un caso concreto, nos limitaremos a describir la aplicación del criterio del maximin. El lector podrá suplir fácilmente los detalles faltantes para incorporar la función objetivo (6) al análisis.

3. SOLUCION DEL PROBLEMA DE PROGRAMACION BAJO INCERTIDUMBRE EN ETAPAS MULTIPLES POR MEDIO DEL PRINCIPIO DE DESCOMPOSICION DUAL DE BEALE

Bradley y Crane (1972) han propuesto utilizar el principio de descomposición primal de Dantzig para resolver su modelo. En el caso de estos autores este método parece ser el más natural, definiendo como subproblemas el conjunto de restricciones de inventarios (1) correspondientes a un mismo instrumento emitido en un período determinado. Es posible resolver estos subproblemas fácilmente como ellos proponen para luego pasar a la solución del problema central que incluye las restantes restricciones. Sin embargo, en nuestro modelo esta vía no está abierta. La dificultad la presentan las restricciones de reciprocidad (3) y las de riesgo institucional (4) que hemos agregado como así también las de valor final mínimo de la cartera (5), aunque estas últimas serían asimilables a las de flujo (2) si se deseara mantener un esquema similar al de Bradley y Crane (1972). Una salida al problema podría consistir en interpretarlo como uno de descomposición en tres etapas, siendo la primera igual a la que proponen los autores mencionados. Los subproblemas correspondientes a instrumentos de una institución determinada integrarían luego un problema de maximización central para cada institución. La solución de esta segunda etapa sería a su vez la correspondiente a un subproblema del problema central final, es decir de la tercera etapa.

Sin embargo nos parece más apropiado en este caso analizar el caso desde la óptica de Beale (1963), como uno de descomposición dual en varias etapas. Si se analizan con cuidado las restricciones es posible detectar dichas etapas, correspondientes a aquéllas en que el problema se subdivide naturalmente debido al conocimiento imperfecto del futuro. Cada una de estas etapas tiene la estructura que presenta el problema cuya solución describe Beale. Trataremos de ver esto con más claridad.

A fin de simplificar la notación y hacer resaltar los rasgos esenciales de la estructura impuesta por la incertidumbre y el tiempo, resumiremos la información que define al sistema de la siguiente manera. Véase el apéndice sobre la estructura temporal del modelo para una explicación más detallada.

En primer lugar, suprimiremos el índice i correspondiente al instrumento; en su lugar, de ahora en adelante interpretaremos a las variables y a los parámetros como vectores de dimensión igual al número de instrumentos, y a los productos correspondientes como productos internos. No habrá dificultad en interpretar las ecuaciones, ya que su significado no varía. Del mismo modo eliminamos el subíndice t correspondiente al período de origen del activo; simplemente nos imaginamos a cada variable o parámetro como un nuevo vector formado por la concatenación de los vectores correspondientes a un estado determinado, colocando uno a continuación del otro siguiendo el orden natural de los índices. Con estas convenciones, el problema se puede resumir como sigue:

(P') maximizar z sujeto a

$$
\begin{array}{llll}
(1') & v_s - a_{s'} + M a_s & \leq 0 & \text{para } s \text{ C } s'; \ s \text{ en } S \\
(2') & -p_s v_s - r_s a_s & \leq f_s & \text{para } s \text{ en } S \\
(3') & - E_s a_s & \leq -m_s & \text{para } s \text{ en } S \\
(4') & E_s a_s & \leq u_s & \text{para } s \text{ en } S \\
(5') & - w_s a_s + b_s z & \leq 0 & \text{para } s \text{ en } S_T
\end{array}
$$

y las usuales de nonegatividad de todas las variables.

En esta formulación del problema entran algunos conceptos nuevos que requieren aclaración, aunque el modelo es el detallado en la sección anterior y aquí sólo se desea enfatizar la estructura del mismo; en consecuencia no es necesario que el lector entre en detalles sobre el significado de las siguientes matrices, cuya única finalidad es la de resumir los coeficientes del modelo.

La matriz M es la que reduce las dimensiones del vector a_s en las dimensiones necesarias para que sea conformable con los otros que aparecen en estas restricciones; por ello dicha matriz tendrá la forma M = (I,0), es decir la matriz identidad con la nula, pues las adquisiciones de activos no deben aparecer del lado izquierdo de la relación (1') con signo positivo. La matriz E_s es la encargada de clasificar y agregar los instrumentos emitidos por cada institución, a fin de que dichos agregados puedan ser comparados con los vectores m_s y u_s, cada uno de tantos elementos como instituciones hay.

En forma aún más esquemática, el problema puede ser escrito como:

(P") maximizar $p\ x^0$ sujeto a

$$b_s \geqq C_s\ x_{s'} + A_s\ x_s \quad \text{para } s\ C\ s';\ s \text{ en } S$$

Un análisis de la estructura del problema (P"), teniendo en cuenta la forma de la relación de continuación C, permite presentar los coeficientes del sistema en el diagrama del gráfico 2. En él se señalan con una x en el lugar correspondiente los bloques de coeficientes no nulos, dejando en blanco los lugares correspondientes a matrices nulas. Las columnas representan cada una un grupo de variables -las x_s del problema (P")- asociadas a uno de los estados del conjunto de estados S.

Gráfico 2

grupos de variables del estado:

grupos de restricciones

s_1	0	1	2	1	1	2	2	2	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2
s_2				1	2	1	2	3	1	1	1	2	2	1	1	2	2	3	3	3
s_3									1	2	3	1	2	1	2	1	2	1	2	3
	x																			
	x	x																		
	x	x		x																
	x	x		x					x											
	x	x		x						x										
	x	x		x							x									
	x	x			x															
	x	x			x							x								
	x	x			x								x							
	x		x																	
	x		x			x														
	x		x			x								x						
	x		x			x									x					
	x		x				x													
	x		x				x									x				
	x		x				x										x			
	x		x					x												
	x		x					x										x		
	x		x					x											x	
	x		x					x												x

La primera matriz no nula en cada columna es la denominada A_s en (P"); las demás corresponden a las C_s. A fin de mostrar mejor la descomposición en subproblemas se han marcado algunas x de más, de manera de completar en cada caso la columna hasta que abarque los subproblemas que le corresponden. A fin de concretar el ejemplo, la estructura de los coeficientes del gráfico 2 es la que corresponde al árbol de decisión del gráfico 1. El orden que se ha elegido para las columnas es el natural, siguiendo primero el orden de las distintas etapas y luego el descendente, según el árbol del gráfico 1.

Del gráfico 2 surge claramente la posibilidad de descomponer el problema total en las distintas etapas. La primera etapa consiste en la elección de x^0 bajo el supuesto de que las siguientes decisiones son óptimas. La columna 2 indica cuáles son las filas del subproblema consistente en la elección óptima de la decisión x^1, suponiendo que las decisiones que le siguen serán óptimas. Puede verse que la estructura de este subproblema, es decir de las filas correspondientes del problema total, es similar a la del problema original. Lo mismo es cierto para cada uno de los subproblemas, que puede ser descompuesto a su vez en subproblemas de menor envergadura, hasta llegar al final del árbol de decisión, lugar en que los subproblemas se han reducido a una sola "x" en el gráfico 2, de manera que sólo es necesario calcular el óptimo condicionado a la información que define al estado de la naturaleza correspondiente, tomando a las decisiones x_s anteriores como parámetros.

De esta explicación surge de inmediato la ventaja que proporciona un método como el de Beale (1963). Si bien allí se describe el caso de una sola etapa en la descomposición dual del problema es posible continuar el proceso de descomposición con cada uno de los subproblemas de la primera etapa de la misma manera. Consideramos que este proceso es el más apropiado para nuestro caso, por dos motivos.

En primer lugar, la solución de un problema de la magnitud del propuesto, podría llegar a ser extremadamente costosa en términos de tiempo y capacidad de computación si se intentara aplicar directamente el método Simplex de programación lineal. Esto ya ha sido señalado por Bradley y Crane para un modelo más sencillo, motivo por el cual optaron por el método de descomposición primal de Dantzig y Wolfe. Por las mismas razones, es decir por la magnitud del problema y la estructura especial que lo permite, es conveniente emplear un método que considere explícitamente la estructura del problema, aprovechándola para mejorar el método de solución reemplazando una gran cantidad de cálculos sencillos por una cantidad apreciablemente menor, aunque ello signifique un algoritmo bastante más complejo.

En segundo lugar, una vez aceptada la necesidad de emplear algún método de descomposición, la estructura del problema difiere del de Bradley y Crane. Por lo visto en el gráfico 2, la forma del árbol de decisión proporciona una partición del problema en subproblemas si en vez de observar el problema (P") original, observamos su dual. Esta observación de inmediato nos permitiría utilizar el método de descomposición primal de Dantzig, si lo aplicamos al problema dual al anterior, y al final del cálculo transformamos la solución del dual a la del primal utilizando los teoremas propios de la teoría de la dualidad de programación lineal. Sin embargo este procedimiento, si bien bastante directo, implica que el algoritmo de solución procederá por pasos intermedios que corresponden a estrategias de inversión que no satisfacen las restricciones del problema original, excepto la última, correspondiente a la solución óptima. Esto, desde el punto de vista práctico, es una gran desventaja, pues significa que no se disponen de estrategias alternativas cercanas a la óptima; a veces puede ser deseable conocer estas alternativas, pues pueden ser preferibles a las óptimas. Todo modelo es una aproximación a la realidad, y no siempre es posible considerar todas las restricciones en forma explícita y cuantificada. Por tal motivo una exploración de estrategias cercanas a la óptima puede llegar a determinar una que sea preferible a la elegida por el modelo. Estas consideraciones nos llevan a preferir un algoritmo que actúe directamente sobre el problema original -de manera que los pasos intermedios del algoritmo proporcionen una secuencia de estrategia factibles- es decir, un algoritmo primal. Afortunadamente el algoritmo de Beale es uno de esta naturaleza, de modo que su utilización permitirá disponer de una secuencia de estrategias de inversión con valor mínimo de la cartera -o valor esperado de la cartera, según sea el objetivo que se persiga- creciente.

4. COMPORTAMIENTO DEL MODELO BAJO CONDICIONES SENCILLAS

En la presente sección analizaremos el comportamiento del modelo bajo supuestos sencillos, a fin de observar si el mismo parece ser razonable, y al mismo tiempo mostrar que se trata de un esquema internamente consistente.

Esta primera aproximación la efectuaremos suponiendo que las expectativas sobre los rendimientos de los activos son ciertas y estacionarias. En otras palabras, supondremos que toda oportunidad de inversión que rige en el presente existirá también en cada uno de los períodos futuros, y que todos los precios, tasa de interés, comisiones, gastos, impuestos, etc. son perfectamente conocidos y no se encuentran sujetos a modificación alguna.

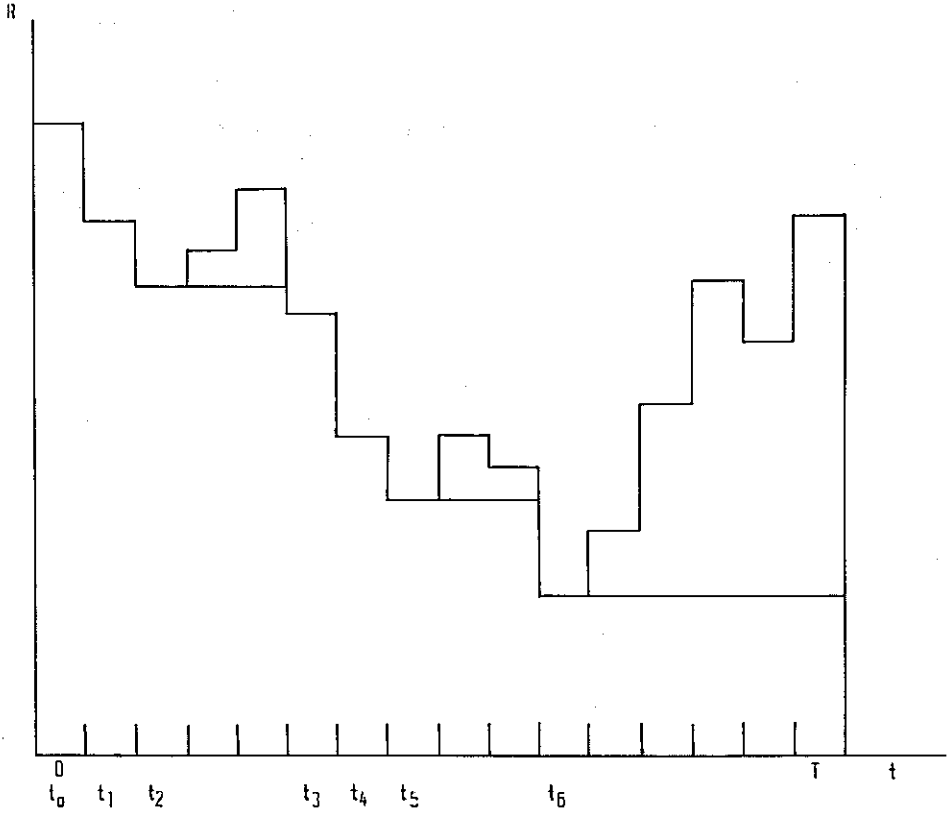
En primer lugar supondremos que también el flujo neto de fondos a invertir es cierto, de modo que se conoce de antemano el nivel exacto que tendrán las reservas internacionales a invertir en cada momento. El caso más sencillo es aquél en que bajo estas condiciones no hay restricciones de reciprocidad ni limitación alguna en cuanto al monto máximo a invertir en un activo determinado.

La situación descripta en el párrafo anterior se ha detallado en el gráfico 3. Sea R_t el nivel de reservas acumuladas, es decir, la suma de los flujos f_t de períodos anteriores. En el gráfico se ha representado la situación entre el período inicial 0 y el final T, representando este último el horizonte económico. Como nos hallamos en una situación de conocimiento perfecto del futuro, la única información que nos proporciona el estado de la naturaleza en que nos hallamos es el período a que se refieren las variables y los parámetros; en este caso, por ejemplo, el flujo neto de divisas f_t correspondiente al período t es el mismo concepto que el definido anteriormente como f_s, dependiendo del estado s, si dicho estado corresponde al único -en este caso- estado $s_1, \ldots, s_t$.

En el gráfico, el eje horizontal representa los períodos t mientras que el vertical el nivel de reservas R_t correspondiente. Los niveles de reservas se han graficado bajo la forma de un histograma delimitado por los trazos superiores del gráfico. Por el momento deben ignorarse los tres trazos horizontales en el interior del histograma.

Es bastante obvio que la solución del modelo bajo las circunstancias descriptas es bastante sencilla, pues consiste simplemente en invertir en los activos de rendimiento máximo de una manera consistente con las restricciones de inventario (1) y de liquidez (2). Normalizando el rendimiento de los distintos activos, en el sentido de que dicho rendimiento se halle referido a un mismo período y a una misma moneda, es posible ordenarlos por dicha magnitud. Bajo circunstancias normales es de esperar que dichos rendimientos se encuentren asociados positivamente con el plazo de la inversión; esto es lo que supondremos aquí, al menos para los rendimientos más altos para cada plazo, ya que esto es consistente con el supuesto de estacionariedad -siempre es posible dividir una inversión a largo plazo en varias a plazos más cortos si dichos rendimientos fueran mejores, de modo que esta situación no

Gráfico 3



se dará en la práctica debido al arbitraje que se produciría-. Una vez determinada la mejor inversión para cada plazo, es posible asignar el mayor monto posible a cada uno de los plazos -aquí el supuesto de que la curva de rendimientos ("yield curve") es creciente es crucial-.

El algoritmo para la determinación de los montos a dedicar a cada uno de los plazos es el siguiente. Sea $S_t = \min \{R_{t'} \ / \ t' \leq t\}$ el nivel mínimo de reservas alcanzado hasta el período t. Este nivel se ha señalado en el gráfico, y nos proporciona un segundo histograma contenido en el anterior, coincidiendo con él excepto en los períodos en que se han marcado los tres trazos horizontales. Dicho nivel mínimo de reservas es por supuesto decreciente, como puede apreciarse en el gráfico, y es el que determina la estructura de plazos de la cartera de activos.

Defínase $t_o = 0$, y luego en forma recursiva, conocido t_j, defínase a t_{j+1} como el primer período posterior a t_j con un nivel de reservas mínimo menor. Más formalmente, $S_{t_{j+1}} < S_{t_j}$, mientras que $S_t \geqq S_{t_j}$ para $t < t_{j+1}$. Los períodos especiales t_j en que S_t sufre una reducción han sido indicados a lo largo del eje horizontal del gráfico. El monto a invertir a un plazo de t_j períodos será evidentemente la diferencia $S_{t_{j-1}} - S_{t_j}$.

Por supuesto que si el modelo se emplea en una situación en que ya hay activos en cartera en el momento de efectuar el análisis, habrá que descontar las inversiones ya realizadas con anterioridad del monto inicial de reservas, agregando al flujo neto de divisas los ingresos debidos a cobros en concepto de intereses o reintegro de capitales. Esto no modifica la esencia del problema, y la solución procede de la misma manera.

Ya la consideración de las restricciones (3) y (4), de reciprocidad y de riesgo institucional respectivamente, complican el cuadro aún antes de tener en cuenta la incertidumbre.

El primer problema es el de consistencia. Si las exigencias de reciprocidad exceden la disponibilidad de reservas a invertir, o si por el contrario los deseos de seguridad imponen que no todas las reservas se inviertan, será necesario revisar las restricciones mencionadas. Por lo tanto supondremos que ello no ocurre, y que las restricciones son consistentes entre sí.

Aun resuelto el problema de la consistencia, pueden surgir dificultades. Es imaginable que el algoritmo desarrollado anteriormente produzca una solución que satisfaga las demás restricciones, pero ello no es probable especialmente en este caso en que la ausencia de incertidumbre induce a invertir lo más posible en un solo instrumento para cada plazo. En caso contrario será necesario modificar el algoritmo para tomar en cuenta explícitamente estas restricciones.

Una manera de hacerlo sin perder mucho de la simplicidad del procedimiento propuesto es invertir a los plazos máximos en aquellas instituciones con quienes mantenemos relaciones especiales, en los instrumentos que proporcionen el mayor rendimiento posible, y en los montos necesarios para cumplir con los compromisos. Esto nos proporciona un instrumento para cada una de tales instituciones. Estos montos deberán luego ser deducidos de R_t, el total de reservas a invertir; nótese que debido al supuesto de consistencia esto siempre será posible. En caso contrario, tendremos la indicación de que la condición de consistencia no se cumple, y deberemos por lo tanto revisar nuestros compromisos de reciprocidad.

El resto de las reservas se tratará como antes, ordenando los activos de acuerdo con sus rendimientos, y asig nándolos a los distintos plazos, mientras esto no afecte la seguridad de la inversión de acuerdo con las restricciones de riesgo institucional. En caso contrario la solución en general no será tan sencilla, como puede verse del siguiente ejemplo. Considérese el caso en que dos instituciones ofrezcan pagar de acuerdo con la siguiente tabla de rendimientos:

Plazo \ Institución	I	II
30 días	5	2
60 días	12	10

Las tasas son porcentuales, y se refieren al rendimiento correspondiente al tiempo indicado.

Supóngase que se dispone de doscientas unidades monetarias a invertir, cien a 60 días y otras cien a 30 días. Además la política de inversión exige que no se invierta más de cien unidades en la institución I por los riesgos que supone la inversión, a pesar de ser más provechosa. En tales circunstancias, hay dos posibilidades. Una consiste en depositar a 30 días en la institución I y a 60 días en la institución II, con un beneficio total de 15; la otra consiste en depositar a mayor plazo en la institución I y menor en la II, con un beneficio total de 14. Nótese que el rendimiento en 60 días de las colocaciones a plazo más corto son del 10,25 y 4,04 por ciento, respectivamente. Por lo tanto, asignando los importes siguiendo el orden de prioridad sugerido por el rendimiento hasta completar el total que se desea asignar a cada institución llevaría a la segunda solución, evidentemente inferior a la primera. Por esta razón, la introducción de estas restricciones obliga a resolver el modelo por medios más complicados, en este caso el método Simplex de programación lineal o algún algoritmo específicamente diseñado al efecto que sea más eficiente.

La consideración explícita de la incertidumbre por supuesto no simplifica el cuadro. Sólo es posible volver al algoritmo sencillo dado a principios de la sección en el caso en que únicamente rigen las restricciones de inventarios y liquidez, y si se hace el supuesto adicional de que no hay mercados secundarios. En este caso, la solución es casi idéntica a la anterior, excepto que ahora en lugar de considerar los niveles de reservas -que no están definidos sin indicación del estado de la naturaleza que corresponde- se consideran en cada período los niveles más bajos consistentes con la marcha previa de los acontecimientos. En otras palabras, en cada período se supone que ocurrirá el flujo neto de divisas más bajo posible, de modo de estudiar sólo el caso más desfavorable. El algoritmo se aplica entonces de la misma manera, con esta nueva definición de nivel de reservas. Por supuesto, esta estrategia dará en todos los casos un mínimo que debe ser superado por cualquier otra estrategia que considere también la posibilidad de operar en mercados secundarios, de manera de liquidar anticipadamente algunas operaciones para afrontar una salida no típica de divisas.

En todos los otros casos no nos queda más que operar el modelo en su totalidad. La interdependencia entre las distintas restricciones no permitirán una solución tan simple como la aquí presentada al solo efecto de dar una idea del funcionamiento del modelo.

5. IMPLEMENTACION

El problema del cálculo de una estrategia de inversión óptima es de magnitud considerable, como puede apreciarse de inmediato si se considera el número de variables que supone predecir las cantidades de activos que potencialmente pueden integrar la cartera en cada una de las eventualidades futuras que uno pueda imaginar. Multiplicando los números correspondientes a las distintas clases de instrumentos, por el número medio de instituciones en cada plaza, por el número de éstas, y multiplicando el resultado por el número de períodos, ya se llega a cifras considerables sin haber introducido aún la incertidumbre. Debe tenerse en cuenta el detalle que requiere un plan de inversión; como hay que decidir también los plazos para ciertos instrumentos, esto obliga a tomar en cuenta un número muy grande de ellos, pues para el modelo instrumentos emitidos a plazos distintos son diferentes si los rendimientos o precios lo son.

Por lo antedicho se ha previsto la implementación del modelo en varias etapas.

La primera consiste en la recolección de la información histórica sobre los activos en que se han invertido las reservas, de manera de ser fácilmente accesible para su utilización en el modelo, ya que las restricciones de liquidez requieren conocer los montos a reinvertir provenientes de vencimientos o ventas de activos. Se trata de un problema puramente contable, pero requiere que dicha información se mantenga al día.

La segunda consiste en la ampliación de esta información completándola con una estimación de las reservas a invertir resultantes de las cuentas externas. En esta etapa sólo se analizarán los efectos de una proyección puntual del balance de pagos, que a los efectos de garantizar la liquidez será una proyección de mínima, en el sentido del flujo neto de reservas. En etapas posteriores, cuando se tomen en cuenta distintas eventualidades en cada período, se necesitará una distribución de probabilidades.

La tercera etapa consiste en el encaje de plazos. Esto ya representa el hallar una solución factible a las restricciones del modelo, aunque todavía bajo el supuesto sencillo de que hay certeza, por lo menos en el sentido de que hay que proveer a la liquidez en la peor de las alternativas imaginables, basada en una estimación pesimista del balance de pagos, con el máximo drenaje de reservas y los peores precios para la realización de los activos, con predicciones también pesimistas sobre la marcha de los tipos de cambio. Estas predicciones estarán basadas en las opiniones de expertos en el campo.

La cuarta etapa consistirá en una simulación basada en las ecuaciones del modelo, utilizando para ello estrategias de inversión propuestas por los distintos interesados en la materia. Esta simulación permitirá hacer un análisis de sensibilidad del modelo frente a cambios en los distintos parámetros, a los efectos de la etapa siguiente. La simulación de estrategias determinadas es ya un paso decisivo en la dirección de la determinación óptima de estrategias; es quizá un proceso demasiado lento para el modelo en toda su complejidad. Sólo por ello se justifica el cálculo de la estrategia óptima, pues la simulación es una herramienta excelente para permitir que los analistas encargados de operar el modelo adquieran un conocimiento a fondo del comportamiento del mismo. Incluso se puede utilizar el modelo para el entrenamiento del personal dedicado a la tarea de selección de estrategias de inversión.

La quinta etapa consistirá en un análisis más detallado de las proyecciones necesarias para el pleno funcionamiento del modelo teniendo en cuenta el conocimiento imperfecto del futuro. Ello requerirá la confección de modelos para los distintos mercados financieros, a fin de proyectar tipos de cambios, impuestos, intereses, rendimientos, etc., con particular énfasis en la estructura de los rendimientos en relación a los plazos ("yield curve"). En esta etapa la posibilidad de simular los efectos de las estrategias de inversión sobre los resultados esperados será invaluable, al permitir señalar cuáles son los parámetros que más afectan a la solución del sistema para así indicar las áreas en que es más beneficioso concentrar los recursos escasos dedicados a la investigación.

La sexta etapa es finalmente aquella en que se podrá determinar la solución completa del modelo, teniendo para ello una información completa sobre la marcha futura de los acontecimientos junto con su verosimilitud.

Por supuesto que lo antedicho no agota el problema de la inversión en activos. Quizá estudios posteriores permitan integrar la inversión en activos con el problema de la determinación óptima del nivel de las reservas internacionales, que aquí se supone resulta de la política económica. Quizá también sea posible integrar el modelo con uno completo sobre la marcha de la economía, a fin de poder contar con proyecciones del balance de pagos que reflejen la política económica en su totalidad. Pero esto deberá esperar a la solución previa del problema de inversión en activos internacionales; el camino a recorrer hasta allí ya es suficientemente largo.

Nada se ha dicho aún sobre la longitud de los períodos a considerar por el modelo. Idealmente podría pensarse que períodos diarios serían los más deseables. Sin embargo la proliferación de variables sería prohibitiva, aunque se adopte un horizonte económico de solo un año. Por lo tanto se sugiere adoptar una aproximación viable, como ser la elección de un primer período igual a una semana, finalizando los siguientes a 1, 2, 3, 6 y 12 meses del momento inicial, con el que así totalizaremos 7 etapas de decisión, teniendo en cuenta los plazos más relevantes. Para el muy corto plazo habrá que fijar montos adicionales a mantener en forma más líquida para atender a las variaciones diarias en el flujo de fondos. En una etapa posterior, si la experiencia computacional del modelo llegare a indicar que una operación diaria del mismo es posible, podrán incluirse períodos más cortos. Un problema de la decisión bajo incertidumbre presenta dificultades debido a que si bien en el momento presente se calcula la decisión óptima a aplicar en el mismo período calculando una estrategia a seguir en cada una de las eventualidades en cada uno de los períodos futuros, sólo la decisión presente llega a aplicarse. La naturaleza misma de la incertidumbre en cuanto al futuro exige que el plan para hoy calculado ayer ya no es relevante hoy, puesto que ayer no se disponía de la información que se posee hoy. Por ello, si bien cada día, o cada semana, se calcula un plan óptimo para todo el horizonte, en cada caso sólo llega a aplicarse la parte del plan de inversión que se refiere al primer período. Esto hace que quizá una operación diaria no sea posible, pero sólo la experiencia podrá indicar con más precisión las limitaciones del modelo.

APENDICE SOBRE LA ESTRUCTURA TEMPORAL DEL MODELO

Como ha sido indicado en el texto, las variables del modelo llevan una designación que consiste en un elemento s del conjunto S de "estados de la naturaleza" o "estados del mundo". Allí la interpretación que se ha dado para cada elemento del espacio S es el de un vector $s = s_1, \ldots, s_t$ indicando cuál es la rama s_j del árbol de decisión que corresponde a la etapa j.

Si bien tal descripción de los eventos es suficiente para los fines del texto, no es adecuada cuando se desea implementar un modelo de esta naturaleza. En tal caso es más natural designar a las variables con un solo índice correlativo, de manera que el conjunto de estados ahora es el de los números naturales 1, 2, 3, ..., # S, donde el símbolo "#" debe leerse "número de elementos de".

Para lograr una designación como la detallada, volvamos al gráfico 1 y numeremos en forma correlativa todos los vértices, comenzando por la izquierda y desplazándonos hacia la derecha y arriba, o bien hacia abajo. De tal manera asignaremos los números naturales en su orden natural a los vértices x^0, x^1, x^2, x^{11}, x^{12}, x^{21}, x^{22}, x^{23}, x^{111}, x^{112}, x^{113}, x^{121}, x^{122}, x^{211}, x^{212}, x^{221}, x^{222}, x^{231}, x^{232}, x^{233} en el orden señalado. Si n_s es el número asignado al estado s, como es posible determinarlo conociendo dicho estado?

Para determinar n_s es necesario conocer cuántas ramas se originan en cada vértice. Supóngase que esta información está contenida en el vector e cuyos elementos indican en el orden indicado precedentemente el número de ramas o eventos emergentes de cada vértice. En el gráfico 1 se tendrá e =(2, 2, 3, 3, 2, 2, 2, 3,). Sea f un vector definido en base a las sumas parciales de los elementos de e como sigue:

$$f_1 = 1$$

$$f_2 = f_1 + e_1$$

$$\dots$$

$$f_{T+1} = f_T + e_T$$

Para nuestro ejemplo del gráfico 1 tendremos f = (1, 3, 5, 8, 11, 13, 15, 17, 20).

Entonces, si $s = s_1, \dots, s_t$, se puede calcular n_s iterativamente.

$$n_1 = 1$$

$$n_2 = s_1 + f_{n_1}$$

$$n_3 = s_2 + f_{n_2}$$

$$\dots$$

$$n_s = s_t + f_{n_t}$$

La recuperación del vector $s = s_1, \dots, s_t$ partiendo del número n_s es también sencilla, siempre que la codificación haya sido correctamente realizada, es decir, siempre que en la secuencia para el cálculo de n_s recién presentada se cumpla siempre la desigualdad $n_{j+1} \leqq f_{n_j + 1}$.

Está claro que en tal caso es posible determinar los elementos de s recursivamente en base a las siguientes relaciones:

n_t es la solución n de $f_n < n_s \leqq f_{n+1}$

n_{t-1} es la solución n de $f_n < n_t \leqq f_{n+1}$

... ...

n_2 es la solución n de $f_n < n_3 \leqq f_{n+1}$

$n_1 = 1$ satisface las relaciones $f_1 < n_2 \leqq f_2$.

Una vez conocida la secuencia de las n_j es fácil determinar los valores de los elementos de s por diferencia, de la fórmula $s_j = n_{j+1} - f_{n_j}$ para todo j, donde se supone que $n_s = n_{t+1}$. El lector podrá seguir estos cálculos más fácilmente con un ejemplo numérico, basado en el ejemplo del gráfico 1. Supóngase que se desea codificar el estado s = (2, 2, 2). La secuencia de las n_j estará dada por el vector n = (1, 2 + f_1 = 3, 2 + f_3 = 7, 2 + f_7 = = 17), de manera que n_s = 17.

La decodificación procede a la inversa. Partiendo de $n_s = 17$, se obtiene $n_t = 7$ por ser $f_7 < 17 \leqq f_8$; $n_{t-1} = 3$ por ser $f_3 < 7 \leqq f_4$; $n_{t-2} = 1$ por ser $f_1 < 3 \leqq f_2$. Esto nos indica que t - 2 = 1, o sea t = 3, y s = (3, 7, 17) - (1, 5, 15) = (2, 2, 2).

Referencias Bibliográficas

BEALE, E.M.L. (1963) - The simplex method using pseudo-basic variables for structured linear programming problems, en R.L. Graves y P. Wolfe, comp., Recent advances in Mathematical Programming, New York: McGraw-Hill, 133-158.

BRADLEY, S.P. y D.B. Crane (1972) - A dynamic model for bond portfolio management, Management Science 19, 139-151.

COHEN, K.J. y S. Thore (1970) - Programming Bank portfolio under uncertainty, Journal of Bank Research 1, 42-61.

COHEN, K.J. y F.S. Hammer (1966) - Analytical methods in Banking, New York; Irwin.

COHEN, K.J. y F.S. Hammer (1967) - Linear programming and optimal bank asset management decisions, Journal of Finance 22, 147-165.

CRANE, D.B. (1971) - A stochastic programming model for commercial bank portfolio management, Journal of Financial and Quantitative Analysis 6, 955-976.

CHARNES, A. y S. Thore (1966) - Planning for liquidity in financial institutions: The chance constrained method, Journal of Finance 21, 649-674.

CHEN, A.H.Y. (1972) - Optimal bank portfolio management, en Eilon y Fowkes (1972), 137-148.

CHENG, P.L. (1962) - Optimum bond portfolio selection, Management Science 8, 490-499.

CHICO PARDO, L.A. (1974) - Inversión de activos internacionales, Boletín Mensual del CEMLA 20, 457-476.

EILON, S. y T.R. Fowkes, comp. (1972) - Applications of Management Science in Banking and Finance, Essex: Gover Press.

HAMILTON, W.F. y M.A. Moses (1972) - An optimization model for corporate financial planning, Operations Research 21, 677-692.

HILLIER, F.S. (1971) - The evaluation of risky interrelat ed investment, Amsterdam: North-Holland.

LUCE, R.D. y H. Raiffa (1957) - Games and decisions, New York: Wiley.

MARKOWITZ, H. (1959) - Portfolio selection: Efficient diversification of investments, New York: Wiley.

POGUE, G.A. (1970) - An intertemporal model for investment management, Journal of Bank research 1, 17-33.

ROBERTSON, J.M. (1972) - A bank asset management model, en Eilon y Fowkes (1972), 149-158.

VAJDA, S. (1972) - Probabilistic programming, New York: Academic Press.

WOLF, C.R. (1969) - A model for selecting commercial bank government security portfolios. The review of Economics and Statistics 51, 40-52.